IDCT ミスマッチ対策について

片山泰男 (GCT)

1993 年 3 月 16 日

0.1 IDCT ミスマッチの発生原因

$X_{k,l}$ を 2 次元 DCT 係数の (k,l) 位置の係数 (整数) とし、$x_{i,j}$ を実空間の (i,j) 位置の値とするとき、 2 次元 8×8 IDCT は、次のように表される。

$$x_{i,j} = (1/4) \sum_{k,l=0,0}^{7,7} X_{k,l} C(k) C(l) \cos(\frac{k(2i+1)\pi}{16}) \cos(\frac{l(2j+1)\pi}{16}) \tag{1}$$

$$C(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{if } (\ n = 0\ ) \\ 1 & (\text{ else }) \end{cases} \tag{2}$$

これを次のように記述する。

$$x_{i,j} = \sum_{k,l=0,0}^{7,7} C_{i,j,k,l} X_{k,l} \tag{3}$$

$$C_{i,j,k,l} = (1/4) C(k) C(l) \cos(\frac{k(2i+1)\pi}{16}) \cos(\frac{l(2j+1)\pi}{16}) \tag{4}$$

$C_{i,j,k,l}$ は、k=0 のときのみ、k(2i+1) が 0 となるので、(4) 式はさらに、つぎのように記述できる。

$$C_{i,j,k,l} = C_{k(2i+1)} C_{l(2j+1)} / 4 \tag{5}$$

$$C_n = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{if } (\ n = 0\ ) \\ \cos(n\pi/16) & (\text{ else }) \end{cases} \tag{6}$$

$|C_n|$ は $C_0 - C_7$ の 8 つの値のいずれかをとり、これらはつぎに示すように 0 でない無理数である。

$$\begin{aligned} C_0 &= 1/\sqrt{2}, \\ C_4 &= 1/\sqrt{2}, \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \\ C_6 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \\ C_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \\ C_7 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \\ C_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}, \\ C_5 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

ところが、2 次元 IDCT 計算にともなって、$C_{i,j,k,l}$ には式 (5) のように、 2 つの C_n の積が現われる。そのために例えば、$C_{0,0,0,4} = C_0 C_4 / 4 = 1/8$ というように有理数となり、とくに偶数を分母とする分数であるため問題となり、$X_{0,4} = \pm 4, \pm 12, \pm 20, ...$ で正確に $x_{0,0}$ が正確に (整数 +0.5) となり、IDCT ミスマッチを起こす。

0.2 単独に発生する IDCT ミスマッチ

4 係数、$X_{0,0}, X_{4,0}, X_{0,4}, X_{4,4}$ について、$C_0 = C_4 = 1/\sqrt{2}$ より、$C_{i,j,k,l} = \pm 1/8(k = 0, 4, l = 0, 4)$ である。(± の符号は i,j の値による。) そのためこれらの 4 係数は単独 (1 つが非ゼロで、他の係数はすべてゼロであること) でも 4 の倍数であり 8 の倍数でないときに IDCT ミスマッチの原因となる。

4 係数以外の $C_{i,j,k,l}$ はすべて 0 でない無理数であるため、単独で IDCT ミスマッチの原因になることはない。ゆえにこれらの 4 係数は特別であり、以下単に "4 係数" というときは $X_{0,0}, X_{4,0}, X_{0,4}, X_{4,4}$ を指す。

0.3 4 係数の相互関係

4 係数は $|C_{i,j,k,l}|$ が同じ値 1/8 をもつため関係があり、

$$x_{i,j} = (X_{0,0} \pm X_{4,0} \pm X_{0,4} \pm X_{4,4})/8 + ...$$

と書くことができ、4 係数が IDCT ミスマッチを発生するかどうかは 4 係数を個別に判断することはできないことが分かる。表 3 に個別奇数化で取り残された IDCT ミスマッチの例をしめす。

0.4 4 係数の相互関係の限定

ところが、実際には上式の ± の 8 種類の式の形はとらず、以下の 4 種類の形しかとらない。その理由を示す。

$$\begin{aligned}
C_{i,j,0,0} &= C_0 C_0/4 \\
C_{i,j,4,0} &= C_{8i+4} C_0/4 \\
C_{i,j,0,4} &= C_0 C_{8j+4}/4 \\
C_{i,j,4,4} &= C_{8i+4} C_{8j+4}/4 \\
|C_{8i+4}| &= |C_{8j+4}| = C_0 = 1/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

実空間の位置、i によって C_{8i+4} の符号が反転するときには $C_{i,j,4,0}$ と $C_{i,j,4,4}$ がともに符号が反転し、実空間の位置、 j によって C_{8j+4} の符号が反転するときには $C_{i,j,0,4}$ と $C_{i,j,4,4}$ がともに符号が反転する。そのため、± のすべての種類である 8 種類の式の形はとらず、以下に例を示すような 4 種類の式の形しかとらない。

$$\begin{aligned}
x_{0,0} &= (X_{0,0} + X_{4,0} + X_{0,4} + X_{4,4})/8 + ... \\
x_{1,0} &= (X_{0,0} - X_{4,0} + X_{0,4} - X_{4,4})/8 + ... \\
x_{0,1} &= (X_{0,0} + X_{4,0} - X_{0,4} - X_{4,4})/8 + ... \\
x_{1,1} &= (X_{0,0} - X_{4,0} - X_{0,4} + X_{4,4})/8 + ...
\end{aligned}$$

以上をまとめると 4 係数を原因とする IDCT ミスマッチは次式の、

$$\begin{aligned}
I_0 &= X_{0,0} + X_{4,0} + X_{0,4} + X_{4,4} \\
I_1 &= X_{0,0} - X_{4,0} + X_{0,4} - X_{4,4} \\
I_2 &= X_{0,0} + X_{4,0} - X_{0,4} - X_{4,4} \\
I_3 &= X_{0,0} - X_{4,0} - X_{0,4} + X_{4,4}
\end{aligned}$$

$I_i(i = 0, 1, 2, 3)$ のどれかの値が 4 の倍数で、 8 の倍数でない場合に起こりうる。たとえば、それ以外の係数がすべて 0 のときに結果は正確に (整数 +0.5) の値になって実際に IDCT ミスマッチが起きる。

さきに述べたように、4 係数以外は、単独で IDCT ミスマッチの原因になることはなく、むしろ 4 係数以外の単独の非ゼロ係数値は 4 係数を原因とする IDCT ミスマッチを防ぐ働きをもつ。

ただし 4 係数以外の 2 個以上の非ゼロ係数は IDCT ミスマッチ防御をしない場合があり、さらには IDCT ミスマッチの直接の原因となることがある。

0.5 2 係数一致による IDCT ミスマッチ

発生頻度は低いが無視できない現象として、つぎのように 2 つの係数の値が一致して IDCT を起こすことがある。この現象をここで係数のペアリングとよぶ。以下にその頻度の高い例を 3 つ挙げて説明する。$X_{1,3}$ と $X_{3,1}$、$X_{1,5}$ と $X_{5,1}$ そして、$X_{3,5}$ と $-X_{5,3}$ がその例である。

- $(C_{i,j,1,3}+C_{i,j,3,1})$ は (i,j) の値が (1,0) 等で、正確に 1/8 になり、$X_{1,3}=X_{3,1}$ が、4 の倍数で 8 の倍数でないときに IDCT ミスマッチとなる。

$$C_{1,0,1,3}+C_{1,0,3,1}=(C_3C_3+C_9C_1)/4=({C_3}^2-C_7C_1)/4=1/8$$

- 同様に $(C_{i,j,1,5}+C_{i,j,5,1})$ は (i,j) の値が (1,0) 等で、正確に $-1/8$ になり、$X_{1,5}=X_{5,1}$ が、4 の倍数で 8 の倍数でないときに IDCT ミスマッチとなる。

$$C_{1,0,1,5}+C_{1,0,5,1}=(C_3C_5+C_{15}C_1)/4=(C_3C_5-{C_1}^2)/4=-1/8$$

- また、$(C_{i,j,3,5}-C_{i,j,5,3})$ は (i,j) の値が (3,0) 等で、正確に $-1/4$ となり $X_{3,5}=-X_{5,3}$ が、偶数で 4 の倍数でないときに IDCT ミスマッチとなる。

$$C_{3,0,3,5}+C_{3,0,5,3}=(C_{21}C_5-C_{35}C_3)/4=(-{C_5}^2-{C_3}^2)/4=-1/4$$

2 係数の値が等しく、4 の倍数で 8 の倍数でないときに発生する IDCT ミスマッチを起こす係数の組をペア係数と呼ぶと、ミスマッチは、つぎの 6 個の式のいずれかに関係して発生する。表 1 に 4 係数以外のペア係数を示す。表 1 の 2 個の添字は交換可能であるため、$X_{k,l}:X_{m,n}$ とあれば、$X_{l,k}:X_{n,m}$ である。また、$X_{k,l}:-X_{m,n}$ とあれば、$X_{k,l}=-X_{m,n}$ であるときに発生することを表す。

$$\begin{aligned}
{C_6}^2+C_2C_6 &= 1/2, & {C_2}^2-C_2C_6 &= 1/2\\
{C_7}^2+C_3C_5 &= 1/2, & {C_1}^2-C_3C_5 &= 1/2\\
{C_5}^2+C_1C_7 &= 1/2, & {C_3}^2-C_1C_7 &= 1/2
\end{aligned}$$

表 1. ペア係数

$X_{1,3}$	$X_{3,1}, X_{5,7}$
$X_{1,5}$	$X_{5,1}, -X_{3,7}$
$X_{3,7}$	$X_{7,3}$
$X_{5,7}$	$X_{7,5}$
$X_{1,1}$	$-X_{3,5}$
$X_{2,2}$	$\pm X_{2,6}$
$X_{3,3}$	$-X_{1,7}$
$X_{5,5}$	$X_{1,7}$
$X_{6,6}$	$\pm X_{2,6}$
$X_{7,7}$	$X_{3,5}$

また、2 係数の値が等しく、偶数で 4 の倍数でないとき IDCT ミスマッチを起こす係数の組を偶ペア係数と呼ぶと、ミスマッチは、次の 3 個の式のいずれかに関係して発生する。4 係数間に関するものを除外したものを表 2 に示す。表 1 と同じく、表 2 の 2 個の添字は交換可能である。

$${C_1}^2+{C_7}^2=1, \qquad {C_2}^2+{C_6}^2=1, \qquad {C_3}^2+{C_5}^2=1$$

表 2. 偶ペア係数

$X_{1,1}$	$X_{7,7}$
$X_{2,2}$	$X_{6,6}$
$X_{3,3}$	$X_{5,5}$
$X_{1,5}$	$X_{7,3}$
$X_{1,3}$	$-X_{7,5}$
$X_{1,7}$	$-X_{7,1}$
$X_{2,6}$	$-X_{6,2}$
$X_{3,5}$	$-X_{5,3}$

0.6 3 係数以上の IDCT ミスマッチ

さらに 3 個以上の係数もやはり協力して IDCT ミスマッチの原因となり、その例は、$X_{4,2} = -X_{5,3} = X_{5,5}$ や、$X_{0,2} = -X_{1,3} = X_{1,5}$ 等がある。また、4 つの係数が 2 組の正の偶ペア係数であるときは 2 つの一致した値が奇数でも IDCT ミスマッチが発生する。ただし、それらの発生頻度は低いので対策の必要性も低い。